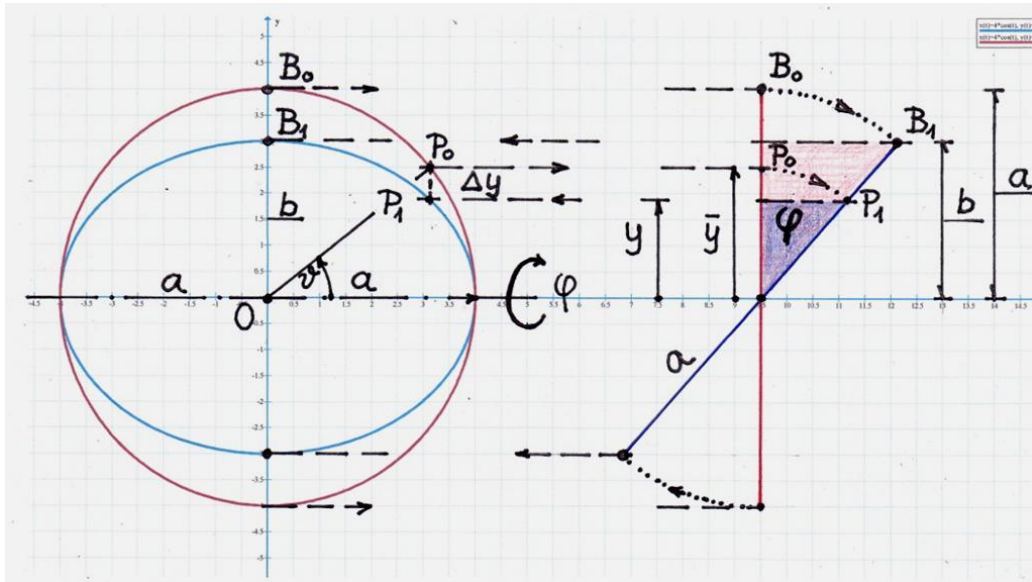


Megint az ellipsziszről

Már sok mindent megtanultunk az ellipsziszről, az ismereteket azonban rendszeresen ápolni kell, továbbá újabbakkal is érdemes a korábbiakat kiegészíteni. Most éppen ezt tesszük. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt azt látjuk, hogy az a sugarú, függőleges síkú körlapot vízszintes átmérője – mint forgástengely – körül φ szöggel elforgattuk, majd a függőleges síkra vetítettük, merőlegesen. Ekkor előállt az a, b féltengelyekkel bíró ellipszis. A színezett derékszögű háromszögek -

$$\cos \varphi = \frac{b}{a} = \frac{y}{\bar{y}}, \quad (1)$$

innen:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \bar{y}. \quad (2)$$

A (2) képlet azt mondja ki, hogy az ellipszis ordinátáit a befoglaló kör ugyanazon abszcisszához tartozó ordinátáinak b/a - szoros (itt) zsugorításával nyerjük.

Most határozzuk meg a tetszőleges x abszcisszához tartozó Δy ordináta - különbséget!

Az 1. ábra szerint, (2) - vel is:

$$\Delta y = \bar{y} - y = \bar{y} - \frac{b}{a} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right). \quad (3)$$

Majd ismét az 1. ábráról:

$$\bar{y} = a \cdot \sin \vartheta. \quad (4)$$

Ezután (3) és (4) szerint:

$$\Delta y = a \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right) = (a - b) \cdot \sin \vartheta, \quad \text{tehát:}$$

$$\underline{\underline{\Delta y = (a - b) \cdot \sin \vartheta.}} \quad (5)$$

Könnyen leellenőrizhetjük ez utóbbi képlet működését, hiszen $\vartheta = 0$ esetén $\Delta y = 0$, valamint $\vartheta = \pi / 2$ esetén $\Delta y = a - b$, a szemlélettel egyezően.

Most számítsuk ki a kör és az ellipszis által határolt „sarló alakú” síkidomok terület - összegét! Ismert képletekkel:

$$T_{\text{sarlók}} = T_{\text{kör}} - T_{\text{ellipszis}} = a^2 \cdot \pi - a \cdot b \cdot \pi = a \cdot \pi \cdot (a - b), \quad \text{tehát:}$$

$$\underline{\underline{T_{\text{sarlók}} = \pi \cdot a \cdot (a - b).}} \quad (6)$$

Megjegyezzük, hogy az ellipszis területe így is kiszámítható:

$$T_{\text{ellipszis}} = T_{\text{kör}} \cdot \cos \varphi = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \pi, \quad (7)$$

ahol felhasználtuk (1) - et is. A sarlók területe más alakban, (7) - tel is:

$$T_{\text{sarlók}} = T_{\text{kör}} - T_{\text{ellipszis}} = T_{\text{kör}} \cdot (1 - \cos \varphi). \quad (8)$$

Még meghatározzuk, hogy az 1. ábrabeli forgatás szöge mekkora. Az ábráról leolvashatóan: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$. Ezekkel és az (1) képlettel:

$$\cos \varphi = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow \varphi = \arccos 0,75 = 41,41^\circ,$$

ami jól egyezik az ábráról lemérhető szöggel. Ha nincs ilyen ábránk, ám ismert a és b , akkor így tudjuk meghatározni az elforgatás φ szögét, amennyiben szükség van rá.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Sződliget, 2015. 08. 04.